OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER. 1903. N° 5

VED FORELÆGGELSEN AF „MATHEMATIKENS HISTORIE I 16. OG 17. AARHUNDREDE"

AF

H. G. ZEUTHEN

(FOREDRAG I MØDET DEN 16. OKTOBER 1903)

I de 25 Aar, i hvilke jeg har haft den Ære at være Selskabets Sekretær, har jeg oftere haft Lejlighed til i Møderne at give Meddelelser fra Mathematikens Historie. En Del af disse ere derefter blevne offentliggjorte af Selskabet eller paa anden Maade, og en Del af dem har udgjort Forarbejder til den Bog, som jeg forelægger iaften.

Til fra først af at komme ind paa dette historiske Studium har jeg haft forskellige Anledninger, saaledes Forelæsninger ved Universitetet. Naar det dernæst har fængslet mig saa meget, kommer det af, at jeg snart deri fandt en Opgave ogsaa for mig som Mathematiker. Den i stedse større Omfang og med voksende historisk Kritik drevne Indsamling af Oplysninger og det derved vundne sikrere Kendskab til Omfanget af den mathematiske Viden, som man til de forskellige Tider har besiddet, har nemlig efterhaanden givet Materialet ogsaa til en mathematisk Vurdering af de Fremgangsmaader, som man til disse Tider raadede over, og af de Resultater, som man havde opnaaet. En saadan mathematisk Vurdering har vel ingenlunde tidligere været ganske forsømt. CHASLES' *Aperçu historique* og HANKEL's ved en tidlig Død afbrudte Arbejde

— for blot at nævne afdøde — have tvertimod for mig først peget hen paa, hvad der i den Henseende bør gøres. Selve Indsamlingen af Stof har ogsaa altid været forbunden med en mathematisk Vurdering; en saadan har nemlig allerede været nødvendig for at afgøre, hvad man i sine Redegørelser skulde tage med af det foreliggende Indhold af de opbevarede Skrifter eller af andre fremkommende Oplysninger. Til Grund for denne Vurdering har man imidlertid ofte blot lagt en Sammenligning med den nuværende Mathematik. En saadan Sammenligning kan let være vildledende og er i hvert Fald ikke udtømmende. Det har ganske vist sin Interesse at erfare, hvornaar en Betragtning eller Fremgangsmaade, som udgør et Led i det nuværende mathematiske System, er naaet til en Skikkelse, hvori vi umiddelbart genkende den, eller hvornaar et Kunstgreb, hvis Nytte vi nu kende, først har været brugt; men større Interesse har det at lægge Mærke til de fra de nuværende afvigende Betragtnings- og Fremgangsmaader eller de Kunstgreb, hvorved man i tidligere Tid i alt Fald delvis opnaaede det samme. Man vil vel i Reglen finde et Slægtskab mellem disse og hine, saa vist som Anvendeligheden til at overvinde de samme Vanskeligheder beror paa disses egen Beskaffenhed; men ogsaa da vil Brugbarheden være forskellig. Den moderne Metode vil i Reglen kunne finde langt mere udstrakte Anvendelser, og den vil være udtalt i Regler, der ere saa bestemte, at de kunne anvendes rent mekanisk paa de foreliggende Tilfælde; men netop fordi de dermed beslægtede ældre Fremgangsmaader ikke vare saaledes udformede, men maatte tillempes til hvert enkelt Tilfælde, kunde de ogsaa tilpasses saaledes til dette, at deres Anvendelse paa det førte til en dybere Indtrængen og en alsidigere Prøvelse end den tilsvarende moderne Behandling. Alene det, at den mindre udviklede Form fremtvang et større Tankearbejde, førte til Iagttagelser, som let ville undgaa den, der nu med Jernbanefart naar til det samme Hovedresultat.

De udviklede Regler, som en Mathematiker lærer i Nutiden, ere desuden mere beregnede paa at besvare bestemt formulerede Spørgsmaal. Den, som vil finde noget nyt, maa ofte frigøre sig fra de færdige Regler, og det kan man lære af dem, som endnu ikke havde omsat deres Fremgangsmaader i færdige Regler.

Værdien af en i ældre Tid anvendt Fremgangsmaade beror saaledes ikke paa den større eller mindre ydre Lighed med dem, hvis Nytte vi nu kende, men paa det, hvortil de i sin Tid kunde bruges og virkelig bleve brugte. Ligeledes har et indvundet Resultat vel sin Betydning i og for sig; men Opdagelsen af et saadant Resultat kan være mere eller mindre tilfældig, og den Værdi, man maa tillægge denne Opdagelse paa et givet Tidspunkt, afhænger af, hvorvidt man da indsaa det vundne Resultats Betydning og forstod at anvende det.

Den rette Vurdering af svundne Tiders forskellige mathematiske Fremskridt kan man derfor kun faa ved at studere disse Tiders Mathematik i deres hele Sammenhæng, ved at sætte sig saaledes ind i de da brugelige Opfattelser og Fremgangsmaader, at man kan bedømme, hvad man dermed kunde udrette inden for det da kendte Omraade og med de da kendte Forudsætninger, og ved tillige at undersøge, hvortil de virkelig ere brugte. En grundig Forstaaelse vil først være naaet, naar man finder fuld Sammenhæng mellem Brugbarheden af de Hjælpemidler, man havde til sin Raadighed, og Omfanget af de Resultater, man derved vandt. Saa faar det endda, hvis ikke direkte Oplysninger foreligge, staa hen, hvorledes man har baaret sig ad i det enkelte; dog ville ogsaa de i den opbevarede Litteratur foreliggende Oplysninger herom lettere blive bemærkede og forstaaede af den, der har sat sig ind i Helheden.

Hermed har jeg antydet Maalet for min mathematiske Historieskrivning. Til at naa det kræves først og fremmest Studium af de betydeligste gamle Forfattere, og et Studium, som ikke gaar ud fra, at vor Tid er bleven klogere, end de vare, men gaar ud paa at lære noget af dem, navnlig at faa fat paa det i deres Synsmaader, som maatte være gaaet tabt under den senere generaliserende Udvikling. Der kræves endvidere en rigelig Benyttelse af den alt foreliggende Historieskrivning, og idet denne ikke kan antages altid at have fremdraget netop det, som man nu har Brug for, kræves der ogsaa nye historiske Efterforskninger.

Selvfølgelig har jeg ingenlunde turdet haabe at naa et saa højt Maal; men jeg har stræbt hen imod det og haaber at have ydet Bidrag til at naa det. Om jeg ved disse Bidrag har været paa rette Vej, har selve mit Arbejde ofte givet mig Lejlighed til at prøve. Jeg har saaledes faaet Bekræftelse paa den i mine tidligere Arbejder vundne Opfattelse af Oldtidens Fremgangsmaader og Tankegang ved senere at se, at Renæssancens Forfattere, der havde søgt deres egen bedste Belæring i Oldtidens Litteratur, enten umiddelbart opfattede denne som jeg eller dog ved dette Studium selv netop førtes ind paa en saadan Tankegang som den, jeg havde tillagt de gamle.

Endnu skal jeg bemærke, at de Maal, som jeg her har omtalt, ikke fra først af have staaet mig klare i deres fulde Omfang, men at de efterhaanden have klaret sig under selve mit Arbejde. Det er den Besvarelse, man finder paa de Spørgsmaal, som man først stiller sig, der fører til at stille de næste Spørgsmaal.

Først laa den Opgave mig nær som Geometrer at studere den gamle græske Keglesnitslære. I denne er der naaet vidtrækkende Resultater; de ere fremstillede i de gamles strenge Form, Sætningerne først og dernæst Beviser, der til fulde godtgøre, at Sætningerne ere rigtige, men umiddelbart ikke give Oplysninger om, hvorledes de ere fundne. Forfattere fra Oldtiden berette vel tillige om visse Metoder; men disse ere af en saa formelt logisk Natur, at de ikke forklare Tilvejebringelsen af det saa fyldige positive Indhold af Sætningerne.

Under disse Omstændigheder ere Mathematikere i den nyere Tid, som selv ere forvænte med fuldt færdige Metoder, undertiden faldne paa den Tanke, at de gamle besad en analytisk Geometri eller en lignende fuldt udviklet Metode, men holdt den skjult for selv at kunne beholde Æren for Erhvervelsen af saa betydningsfulde Resultater. Denne Hypotese, som man ogsaa har anvendt i andre Tilfælde f. Eks. overfor Newton, er mig som oftest usmagelig. De gamle opstillede ganske simpelt deres Beviser i de Former, man da krævede, naar Sætningernes Rigtighed skulde erkendes; men i disse Beviser lægges en saadan Mangfoldighed af Viden, af Kendskab til Hjælpemidler og af Evne til at kombinere det, de vidste og formaaede, for Dagen, at de ganske sikkert deri maa have røbet de Midler og Betragtninger, der have staaet til Raadighed under Udledelsen. Ved nøjere Eftersyn finder man ogsaa, at disse Hjælpemidler ere saadanne, som maa have været nyttige under Udledelsen, og selv om denne ikke altid har været saa hurtig som hos den, der bruger en moderne Metode, maatte den efterhaanden erhvervede store Viden stadig give Anvisning paa nye og frugtbare Anvendelser af disse Hjælpemidler.

Et af de Hjælpemidler, som vi finde anvendt i den gamle Keglesnitslære, er Koordinater, skævvinklede saavel som retvinklede. Disse havde en mindre abstrakt Natur end i den analytiske Geometri; men netop den stadige nøje Tilknytning til den foreliggende Figur gjorde dem nyttige ved dennes Undersøgelse. I den analytiske Geometri knyttes Brugen af Koordinater til en Algebra, hvis Organ er Bogstavregning. Den kjendte de gamle ikke; men i Keglesnitslæren som i mangfoldige andre af deres Undersøgelser viser det sig, at de besad og anvendte en ret vidtrækkende Algebra, hvis Operationer udføres ved Omdannelse af geometriske Figurer. Denne geometriske Algebra omfattede en fuldstændig Behandling af Ligninger af anden Grad, hvad det særlig kommer an paa ved Behandling af Keglesnit. Ved Benyttelsen af selve Keglesnittene kunde den ogsaa udstrækkes til Spørgsmaal, som staa i Forbindelse med Ligninger af tredie og fjerde Grad. Lettelser i dens Anvendelse paa Keglesnitslæren kunde ofte opnaas ved at sætte dens geometriske Iklædning i Forbindelse med den Figur, som skulde undersøges. Andre Steder viser den geometriske Algebra sin Uafhængighed af denne Figur, f. Eks. naar de algebraiske Operationer, som vedrøre en skævvinklet Figur, fremstilles ved en tilføjet retvinklet Figur.

Studiet af den græske Keglesnitslære, som førte til mit af Selskabet publicerede Skrift: *Keglesnitslæren i Oldtiden* (1885), maatte nøje knyttes til et almindeligt Studium af den græske Mathematik i Almindelighed. Jeg maatte saaledes studere den geometriske Algebras øvrige Optræden, dens Oprindelse, Formaal og andre Anvendelser. Jeg førtes derved ogsaa ind paa i Almindelighed at prøve, hvad Grækerne vilde opnaa og virkelig opnaaede ved de strenge Former, som vel overalt bringe fuld Sikkerhed, men fra først af skjule, hvorledes deres Fremgangsmaader have kunnet være saa frugtbare, som de store Resultater vise, at de have været. Jeg maatte ogsaa komme ind paa deres Behandling af saadanne Opgaver, som nu gøres afhængige af Infinitesimalundersøgelser, deres Behandling af Maximums- og Minimumsopgaver ved Opstilling af Mulighedsbetingelser for Opgaver, deres Tangentbestemmelser, og deres strenge Exhaustionsbeviser for Sætninger om Arealer, Rumfang o. s. v. Disse sidste ere knyttede til de samme Delinger af den Størrelse, der skal bestemmes, som i den moderne Mathematik vilde fremstilles enten ved uendelige Rækker eller ved Integrationer, og Operationerne foretages med en saadan Konsekvens, at man — ogsaa her uden formel Opstilling af almindelige Regler for Løsning af herhen hørende Opgaver — maa have haft Blik for, hvad der i det hele kan opnaas ved saadanne Fremgangsmaader.

Udbyttet af dette Studium har jeg nedlagt i min Bog: *Forelæsninger over Mathematikens Historie, Oldtiden og Middel-*

alderen. Som Titlen viser, følger jeg i denne Bog den græske Mathematik ud over dens Blomstringstid. Da denne var ophørt, var den strengt bevisende Form, hvori de fundne Resultater vare opbevarede, en Hindring for ny Opblomstring, saalænge man ikke ved et nyt og selvstændigt Arbejde genfandt eller erstattede de Fremgangsmaader, som ikke ligefrem kunde læses ud af de opbevarede Skrifter. Et saadant selvstændigt Arbejde satte først de arabiske Forfattere i Stand til at tilegne sig den græske Geometri og Algebra saaledes, at de baade kunde forstaa endog de vanskeligere opbevarede Skrifter og selv behandle Emner af samme Art som disse. Naaede de end ikke nye almindelige Resultater paa de nævnte Omraader, satte deres Kendskab til den indiske Regnekunst dem i Stand til bedre at udnytte Algebraen. Dette Kendskab medførte virkelige Fremskridt i Trigonometrien, som iøvrigt i Tilslutning til Astronomien var fremmet hos Grækerne, ogsaa efter at de øvrige mathematiske Fremskridt vare ophørte[1]. I de 3 sidste Aarhundreder af Middelalderen arbejdede Kendskab til Mathematiken, saaledes som den navnlig havde udviklet sig hos Araberne, sig ogsaa frem i det vestlige Europa. Navnlig naaede man i Trigonometrien væsentlig til Arabernes høje Standpunkt. Dette træder os lige før Begyndelsen af den nyere Tid imøde hos Regiomontanus. I andre Retninger var man kun forberedt til, efterhaanden som man selv skred videre frem, at udnytte, hvad der fandtes i de videregaaende græske Skrifter, som nu bleve bekendte i Europa.

Det Maal, som jeg havde sat for mine historiske Arbejder, maatte bringe mig til at gaa videre. Jeg maatte ønske at følge Omdannelsen af den græske geometriske Algebra, som endnu vedblev at danne Grundlaget for den eksakte Mathe-

[1] Den græske og arabiske Trigonometri er i den 1902 udkomne franske Udgave af min her anførte Bog behandlet fuldstændigere end i den danske og tyske Udgave (1893 og 1895).

matik, om den end hos Araberne i sine praktiske Anvendelser var bleven tilsat med og nu under Mathematikens hurtige Fremskridt blev end mere tilsat med en paa Regning bygget Algebra. Denne Omdannelse ender med, at i DESCARTES' *Géométrie* (1637) den arithmetiske Algebra og dennes Fremstilling i et Tegnsprog, med hvilket der opereres efter bestemte Regneregler, paa eksakt Maade blev lagt til Grund for alle mathematiske Undersøgelser, ogsaa de geometriske. Jeg maatte endvidere følge de i den nyere Tid genoptagne Infinitesimalundersøgelser, indtil de forskellige Fremgangsmaader, hvorved store Mathematikere efterhaanden naaede betydningsfulde Resultater, under den forskelligartede Brug efterhaanden naaede til en Sammenhæng og Ensartethed, som LEIBNIZ kunde give Udtryk i Differentialregningens bestemte Regler (1684), hvortil tilsvarende Integrationsregler derefter maatte slutte sig. Det er nemlig netop denne Overgang fra Enkeltundersøgelser til almindelige, regelbundne Metoder, som jeg har for Øje. Under denne Udvikling maatte jeg ikke udelukkende opsøge de Bidrag til de mere almindelige Metoder, som efterhaanden fremkom; thi ligesaa lærerigt er det, ogsaa paa dette Omraade, at se, hvorledes den Tids Mathematikere kunde undvære et forudgaaende Kendskab til en saadan Metode og dog baade løse de foreliggende Opgaver og ofte faa mere ud af Løsningen end det, som vil falde Øjnene paa den, som nu dertil bruger en færdig Forskrift.

Disse to Udviklinger: af Algebraen og af Infinitesimalmathematiken, samt de første Prøver paa Brugen af de almindelige Metoder, som deraf fremgik, er der Lejlighed til at se i Mathematikens Historie i det 16de og 17de Aarhundrede. De ere vel at finde i enhver paalidelig Fremstilling af denne Historie; men i den Bog, som jeg iaften fremlægger, har jeg særlig haft dem for Øje baade ved den hele Ordning og ved de enkelte Undersøgelser, som jeg fortrinsvis har valgt at fremdrage blandt den Tids mange Arbejder. Samtidig har jeg ogsaa maattet fastholde de andre Traade, som under den almindelige rige Udvikling efterhaanden komme frem, og som trods deres Forskellighed ofte forbinde sig til sammenhængende Næt.

Det gjaldt nu om at faa det hele Stof ordnet saaledes, at Udviklingen saa vidt muligt kunde træde frem i sin fulde Sammenhæng. Hertil vilde en Ordning efter Mathematikens nuværende Inddeling ikke være tjenlig. Nu begynde vi f. Ex. Infinitesimalregningen med Differentialregningen, hvorpaa Integralregningen dernæst bygges; men i den historiske Udvikling gik netop Udførelsen af Integrationer i Spidsen. Jeg har vel maattet samle de forskellige Grupper af ensartede Undersøgelser hver for sig; men for at vise, hvorledes de efterhaanden have grebet ind i hinanden, har jeg saa vidt muligt maattet omtale de enkelte Dele af Mathematiken i den Orden, hvori efterhaanden den ene benyttede det, som den anden havde ydet. Jeg skal her kort angive og begrunde den Ordning, som jeg har valgt.

Forud skikker jeg (I) et ret udførligt historisk og biografisk Overblik, hvori jeg gør Rede for det, som vedrører de forskellige Mathematikeres Personligheder, de Forhold, hvorunder de virkede, og de Forbindelser, som de havde med hverandre. For at faa disse frem har jeg brugt en Ordning, som delvis er kronologisk, delvis geografisk. Til dette Afsnit kan jeg dernæst henvise i det følgende ved Spørgsmaal, hvor disse ydre Forhold have haft Betydning. Fremstillingen af den mathematiske Udvikling har jeg delt i (II) et Afsnit om den endelige Analyse og (III) et om Infinitesimalregningens Opstaaen og første Udvikling.

II, 1. Jeg begynder det første af disse to Afsnit med Løsningen af Ligningerne af 3die og 4de Grad i Italien. Denne viste, at man nu formaaede noget, som hverken var lykkedes for Grækere eller Arabere. Man fik derved Tillid til egne Kræfter og vovede paa egen Haand at gaa endnu videre i sine algebraiske og andre mathematiske Undersøgelser og at stole paa disses Resultater uden altid at ty tilbage til de antike Fremstillingsformer.

2. Man gjorde tvert imod paa mere og mere konsekvent Maade Brug af de Lettelser, som man alt tidligere havde begyndt at tilstræbe ved Anvendelse af Tegn, navnlig til at opskrive Ligninger. Disse Tegn kunde i det ydre være mere eller mindre hensigtsmæssige. Naar man paa dette Punkt især maa fremhæve den franske Jurist Vieta, er det navnlig, fordi han anvendte Tegn ikke blot til at fremstille ubekendte Størrelser og deres Potenser, men ogsaa til at fremstille vilkaarlige, men givne Størrelser. Dette sætter ham i Stand til gennem Operationer med de ved Tegn fremstillede Størrelser ikke blot at løse bestemte numeriske Opgaver, men ogsaa at udlede og opstille almindelige Resultater. Han bliver derved Skaber af den mathematiske Formel.

3. Det Organ, hvoraf han saaledes er kommen i Besiddelse, sætter ham i Stand til med større Konsekvens og Fuldstændighed at fremstille, begrunde og fortsætte de af Italienerne begyndte Undersøgelser af de algebraiske Ligningers almindelige Theori. I dette Arbejde fandt han Tilslutning hos Mathematikere i England og Nederlandene.

4. En egen Klasse algebraiske Ligninger tiltrak sig Vietas særlige Opmærksomhed, nemlig Vinkeldelingsligningerne, hvilke trods høje Grader kunne løses paa Grund af deres trigonometriske Betydning. Trigonometrien var, som alt anført, fremtraadt i en ret udviklet Skikkelse hos Regiomontanus, og Astronomiens stigende Krav fremmede nu yderligere dens Udvikling. Det var jo Koppernikus', Tyge Brahe's og Kepler's Tid. Blandt disse krævede særlig Tyge Brahe's nøjagtige Observationer tilsvarende Nøjagtighed i Beregningerne. Derfor afgive de Regneregler, som anvendtes paa Hveen, et godt Eksempel paa den Trigonometri, man den Gang havde til sin

Raadighed[1]. VIETA bidrog mer end nogen anden paa den Tid til at fremme Trigonometrien; han var dog ikke den eneste, som havde bemærket Betydningen af Vinkeldelingsligningerne

5. Tillempning til numerisk Beregning var et Hovedformaal ved de algebraiske og trigonometriske Ligningers Behandling. Numerisk Beregning fremmedes yderligere paa den Tid ved Indførelsen af Decimalbrøker ved den hollandske Ingeniør STEVIN, VIETA og KEPLER's Ven, den i Tyskland boende schweiziske Urmager BÜRGI. De forskellige theoretiske og praktiske Hjælpemidler anvendtes til stedse nøjagtigere Beregning af trigonometriske Tavler og af π. Den saakaldte prosthaphæretiske Metode tillod at anvende de trigonometriske Tavler til at ombytte Multiplikation med Addition paa en lignende Maade som senere ved Logarithmer, men dog noget omstændeligere. Metoden brugtes paa Hveen, men Dr. BJØRNBO har nylig fundet Beviser for, hvad man alt formodede, at WERNER i Nürnberg tidligere har kendt den i samme Omfang.

6. Denne Metode afløstes dog snart af Logarithmer, som BÜRGI og den skotske Herremand NEPER opfandt uafhængig af hinanden og i meget forskellig Skikkelse. Den sidste kom dog først frem med sin Opfindelse og gav straks Logarithmerne en meget almindelig Definition, som senere kunde danne Grundlaget for den infinitesimale Behandling af den logarithmiske Funktion, hvortil atter hensigtsmæssige Beregningsmaader skulde knytte sig. Tildels efter Samraad med NEPER gav BRIGGS Logarithmerne den til praktisk Brug hensigtsmæssige Skikkelse, hvor 10 er Grundtallet.

[1] Medens TYGE BRAHE og hans Disciple nærmest blot anvendte den Trigonometri, som da forefandtes, skyldes et af de Arbejder over selve Trigonometrien, som i den Tid fik størst Betydning og Udbredelse, Flensborgeren THOMAS FINCKE. Det var hans *Geometria Rotundi*, som han havde udgivet i Udlandet, før han blev Professor i Mathematik og senere i Medicin ved Københavns Universitet, en Stilling, han dernæst beklædte i over 60 Aar.

7. Jeg vender mig dernæst til de hele Tals Teori, som ogsaa maatte fremmes ved Algebraens Fremskridt. Talteoretiske Skatte har Menneskeheden opbevaret fra ældgamle Tider, tildels gennem flere Aartusender, i arithmetiske Anekdoter og Gaader af samme Art som dem, vore illustrerede Blade indeholde, eller i Regler for Dannelsen af Tryllekvadrater o. s. v. Ved den pikante eller kuriøse Iklædning kunde de bevares gennem Tider, som ikke havde nogen dybere Forstaaelse, indtil saadanne Tider, i hvilke man virkelig kunde hæve Skatten. Dette kunde nu ske ved Algebraens Hjælp, og en af dem, hvem dette lykkedes bedst, var den litterært fint dannede BACHET DE MÈZIRIAC, som var et af de første Medlemmer af *Académie Française.* Han oversatte tillige den græske Arithmetiker DIOFANT og knyttede Hjælpesætninger til hans Værk.

8. Under det nu frembrydende rigere Studium af Talteorien viste snart den franske Dommer FERMAT sig som en af de dybestgaaende Mathematikere, der har levet. Sine mange talteoretiske Sætninger har han for største Delen efterladt isolerede og uden Beviser; men netop af Bestræbelserne for at finde disse er den følgende Tids mere sammenhængende Talteori væsentlig fremgaaet.

9. Beslægtede med Talteorien ere Reglerne for at bestemme Antal af Permutationer og Kombinationer. Hertil sluttede sig snart en Sandsynlighedsregning. Dennes Grundlæggere ere FERMAT, PASCAL og HUYGENS.

10. Geometrien laa for saavidt bag ved Behandlingen af de fleste i det foregaaende omtalte Emner, som en geometrisk Fremstilling i Tilslutning til Grækerne ansaas for det eneste eksakte Udtryk for Sætninger, som skulde omfatte baade rationale og irrationale Størrelser. Man løste ogsaa mange geometriske Opgaver, men længe nærmest i Tilslutning til de fra Grækerne nedarvede Synsmaader. Noget nyt indtraadte derimod ved den projektive og ved den analytiske Geometri.

Den første, som paa en ny og systematisk Maade anvender Perspektiv til Udledelse af geometriske Sætninger, grundlagdes af den franske Ingeniør DESARGUES, som selv i stort Omfang anvendte de af den fremgaaende Metoder. Det samme gjorde PASCAL med stort Held. Og dog gik den projektive Geometri i det væsentlige i Glemme, indtil den i Begyndelsen af det 19de Aarhundrede genfandtes af PONCELET. I Modsætning dertil dannede DESCARTES' analytiske Geometri (se 12) Afslutningen paa en gammel Udvikling og et Grundlag for det efterfølgende mathematiske Arbejde.

11. Den til den analytiske Geometri hørende Brug af Koordinater var ikke blot at finde i de gamles geometriske Beviser, men var ogsaa nu et vigtigt Fremstillingsmiddel for de begyndende Infinitesimalundersøgelser. Uafhængig af DESCARTES anvendte ogsaa FERMAT dem, først navnlig til at finde de manglende Beviser for Sætninger, der af de gamle meddeles uden Bevis, og som gaa ud paa, at visse geometriske Steder ere rette Linier, Cirkler eller Keglesnit. I Realiteten kunne disse Beviser ikke have afveget synderlig fra de gamles; men den Forbindelse, hvori FERMAT satte Brugen af Koordinater med VIETA's Algebra, gav ham et Hjælpemiddel af større Rækkevidde end deres, selv om han, ligesom DESCARTES, under dets Anvendelse endnu maatte gøre Brug af Sætninger hos APOLLONIOS.

12. DESCARTES nøjedes i sin „Geometri“ hverken under sin Brug af Koordinater eller i andre Tilfælde med VIETA's Algebra, men han begynder sin Bog med en bestemt Udtalelse af den Reform, hvortil vi i det foregaaende have peget hen. Han giver fra først af saadanne Definitioner paa Regningsarterne, som ogsaa gjælde for irrationale Størrelser. Idet han dernæst betegner Størrelserne ved Bogstaver, Regningerne ved Tegn, deriblandt af nyt vort nuværende Potenstegn, faar hans Bogstavregning samme Almengyldighed, som man hidtil havde tillagt Geometrien. Det Omraade, som den omfatter,

udvides yderligere ved, at Hollænderen HUDDE i et Tillæg til DESCARTES' Geometri antager, at de ved Bogstaver betegnede Størrelser ogsaa kunne være negative. DESCARTES giver Regler for at sætte en mathematisk Opgave i Ligning; for de geometriske Opgaver sker dette ved Brug af Koordinater. Disse og de algebraiske Ligningers Grader giver et nyt Overblik over alle algebraiske Kurver. De fuldstændigere Hjælpemidler benytter han til væsentlige Udvidelser af de algebraiske Ligningers Teori.

13. Den Del af det 17de Aarhundrede, som var tilbage, giver Lejlighed til, foruden Forbedringer af DESCARTES' analytiske Geometri, at se, hvorledes man paa mange Omraader ogsaa af den endelige Analyse benyttede den Algebra, som han havde frigjort fra Geometrien og bygget paa Bogstavregning. Vi træffe der vigtige Arbejder af NEWTON og LEIBNIZ. Den første foretog dog ogsaa vidtgaaende geometriske Undersøgelser i Tilslutning til de gamle. Den forbedrede Algebra og den analytiske Geometri dannede et vigtigt Grundlag for de paa denne Tid ivrig fortsatte Infinitesimalundersøgelser.

Min Bogs Afsnit III om Infinitesimalundersøgelserne begynder jeg med:

III. 1. Et Blik paa den teoretiske Mekanik i Begyndelsen af den nyere Tid. Løsning af statiske Opgaver, navnlig Tyngdepunktsbestemmelser, dannede den første Tilknytning til ARCHIMEDES' infinitesimale Bestemmelser, og GALILEI's nye Undersøgelser om Bevægelsen fremkaldte nye infinitesimale Bestemmelser, og paa samme Tid gav denne Behandling af kontinuerte Ændringer nye og snart udnyttede Synsmaader for Infinitesimalmathematiken. Det samme maa siges om HUYGENS' senere mekaniske Arbejder, og det er i et mekanisk Værk, nemlig NEWTON's *Principia*, at de videstgaaende infinitesimale Opgaver løses i det her behandlede Tidsrum. Sidstnævnte Værk omhandles dog først senere (11).

2. Af de forskellige infinitesimale Bestemmelser behandles først Integrationer før Integralregningen. At de ogsaa gaa forud for Differentialregningen viser, i hvor høj Grad de Mathematikere, der i rigt Omfang løste disse Opgaver, maatte opfinde andre Hjælpemidler end dem, som Nutidens Metoder stille til umiddelbar Raadighed.

Kepler, der ved sine indgaaende Regnearbejder var fortrolig med Bortkastelsen af Størrelser, som ere for smaa til at komme i Betragtning indenfor de foreliggende Regningers Nøjagtighedsgrænse, var derved forberedt til med sikker Takt at indføre og behandle uendelig smaa Størrelser, overfor hvilke man eksakt kan bortkaste det, vi nu kalde. uendelig smaa Størrelser af højere Orden. Hans Sikkerhed i Behandlingen viser sig ogsaa i, at han ganske tør forlade Archimedes' strenge Fremstillingsform. Den, han sætter i Stedet, er vel ingenlunde udtømmende, men den giver de Overblik, hvorfor der nu var Brug. Allerede han gjorde ogsaa nogen Brug af Fremstilling af Integralerne som Arealer henførte til retvinklede Koordinater. Cavalieri almindeliggjorde denne Fremstilling og forbandt dermed et almindeligt Begreb *„indivisible Størrelser“*. Dette filosofiske Begreb var ganske vist alt andet end klart, men de almindelige Regler, han gav for saadanne Størrelsers Beregning, vare gode nok og bare megen Frugt. Større formel Klarhed havde den belgiske Jesuit Gregorius af St. Vincent's samtidige Arbejder i Tilslutning til de gamle, men de rakte ikke nær saa vidt.

Begge disses Fortrin forenede Fermat's Integrationer, som han konsekvent fremstillede geometrisk som Kvadraturer. Han havde her som andetsteds passende Fremgangsmaader til Rede for alle de Vanskeligheder, han mødte; men paa Grund af sen Offentliggørelse fik hans Arbejder ikke den Indflydelse som Cavalieri's. Pascal sluttede sig nærmest til denne sidstes Form, som han dog sikrede ved klarere logiske Begrebsbestemmelser. I Frodighed kappedes han paa dette Omraade med Fermat.

Det mest iøjnefaldende Træk i WALLIS' Integrationer er hans dristige Anvendelse af ufuldstændige Induktioner og af Analogislutninger. Hvad der er bevist for det Tilfælde, hvor et vist Tal er helt og positivt, overfører han saaledes jevnlig uden nogen ny Begrundelse paa de Tilfælde, hvor det er brudent eller negativt. Han gør ikke dette af Mangel paa logisk Sans, hvilken han f. Eks. lægger for Dagen ved sine eksakte Udtryk for infinitesimale Grænseovergange, men i Tillid til det hele mathematiske Systems Brugbarhed. Denne Tillid skuffes ikke, hvad Resultaternes Rigtighed angaar, og den har senere givet Anledning til de Begrebsudvidelser, som lade Behandlingen fra først af omfatte ogsaa de Tilfælde, som han selv kun faar med ifølge Analogi.

Til Slut sammenstilles en Del „Anvendelser af Integrationerne", i hvilke ogsaa HUYGENS tager levende Del. Det ses deraf, med hvilken Sikkerhed man forstod at omsætte et Integrationsresultat fra et Omraade til et andet, Kvadraturer til Rektifikationer, Tyngdepunktsbestemmelser til Bestemmelser af Inertimomenter o. s. v. Netop dette klare Blik for Enheden af de forskellige Bestemmelser, som nu udføres ved en og samme Integration, har berettiget os til under et at tale om „Integrationer" i Stedet for at udstykke disse i Kvadraturer, Kubaturer o. s. v. Dette Blik skærpedes derved, at Manglen paa færdige Metoder stedse gjorde det ønskeligt at faa hver Integration udført paa det Omraade, hvor der forelaa bedst Midler til dens Gennemførelse.

3. I Betragtning af, at ingenlunde enhver Integration kunde udføres under endelig og algebraisk Form, men navnlig mange føres tilbage til Cirklens og Hyperblens Kvadratur, det er til cirkulære og logarithmiske Funktioner, fik man for disses og andre — nu saakaldte transcendente — Integralers Vedkommende Brug for uendelige Tilnærmelsesbestemmelser, særlig for uendelige Rækker. Foreløbig fremstilles i Bogen, hvad der

i den Retning fremkom før NEWTON's almindelige Rækkeudviklingsmetode.

4. Samtidig med Integrationerne forberedtes ogsaa den Regning, som snart skulde danne ogsaa disses bedste Grundlag, nemlig Differentialregningen. I Tilslutning til Oldtiden knyttede man først de herhen hørende Tangentbestemmelser samt Maximums- og Minimumsbestemmelser til Grænsebestemmelserne for geometriske og algebraiske Opgavers Mulighed. Nye Synsmaader hentedes fra den grafiske Fremstilling af en Kurves Variation og fra GALILEI's Bestemmelse af et bevæget Punkts Bane. Til den første knytter sig allerede en Maximumsbestemmelse hos KEPLER, til den sidste TORRICELLI's og ROBERVAL's Tangentmetoder. For at faa fuld mathematisk Sikkerhed maatte dog saadanne Bestemmelser knyttes til den mere udviklede Algebra. Dette skete i DESCARTES' og HUDDE's og særlig i FERMAT's Metoder. Den sidstes Regler for Tangent- og Maximums- og Minimumsbestemmelser bero paa en klar almindelig Regel for Dannelsen af den Størrelse, som nu kaldes Differentialkvotienten, dog uden at der endnu gives detaillerede Regneregler.

5. I et indskudt Stykke om Cykloiden samles de tildels forud berørte Bestemmelser vedrørende denne Kurve, som havde afgivet de mest ansporende Exempler under den i de foregaaende Stykker omtalte Udvikling. Til den knyttede sig fremdeles en af Datidens allervidest gaaende infinitesimale Undersøgelser, nemlig HUYGENS' Undersøgelse af en tung Partikels Bevægelse paa en Cykloide og hans almindelige geometriske Lære om Evoluter.

6. Den nys nævnte Bevægelsesopgave løses nu ved en Differentialligning. Adskillige andre Opgaver af denne Art vare allerede traadte frem under Form af saakaldte omvendte Tangentopgaver: det er saadanne, hvor en Kurve bestemmes ved en Egenskab, som Tangenten i et vilkaarligt af dens Punkter skal have. NEWTON's Forgænger i Professoratet, hans

Lærer og Ven BARROW, tildels ogsaa Skotten GREGORY, førte disse Opgaver tilbage til et almindeligt Synspunkt ved i nogen Tilslutning til GALILEI og TORRICELLI at opstille Modsætningsforholdet imellem Tangentbestemmelse og Kvadratur eller, som det senere kom til at hedde, Differentiation og Integration.

Paa det nævnte Modsætningsforhold beror det nye Udgangspunkt, som først NEWTON og senere LEIBNIZ tog for den hele Infinitesimalmathematik. Den maatte begyndes med Differentiation som den Operation, for hvis Udførelse der i Tilslutning til FERMAT kunde gives bestemte Regler. Til den kunde dernæst Integration slutte sig som den omvendte Operation, ligesom Division slutter sig til Multiplikation.

NEWTON's og LEIBNIZ' og den sidstes nærmeste Efterfølgeres Arbejder optage hele Resten af Bogen. I 7. behandles NEWTON's Brug af det af BARROW opstillede Modsætningsforhold, i 8. hans almindelige Rækkeudviklingsmetode, i 9. de ved disse to Fremgangsmaader vundne Resultater. Af alt dette lærte LEIBNIZ under sine Arbejder paa samme Emner en Del at kende, hvorimod NEWTON's Fluxionsbetegnelser først senere kom offentlig frem, og det Skrift, hvori Fluxionsmetoden fremstilles i fuld Sammenhæng, først fremkom langt senere. Om denne Metode, som NEWTON besad, før LEIBNIZ' Arbejder paa denne Sag begyndte, meddeles i 10. 11. handler om NEWTON's *Principia*, der udkom 1686—87, 12. om LEIBNIZ' Arbejder, indtil han i 1684 opstillede Grundreglerne for Differentialregningen. Med disse to Værker begynder en ny Tid, som jeg i 13. følger igennem de 15 Aar, som vare tilbage af Aarhundredet. De vise allerede den raske Udvikling, som sattes i Bevægelse ved LEIBNIZ' Differentialregning, hvortil Integralregningen straks sluttede sig som en ved hele den foregaaende Udvikling modnet Frugt.

NEWTON er her behandlet først som den, der udførte sine Arbejder ganske uafhængig af LEIBNIZ. Om denne ved man i vore Dage ret sikkert, hvilke af NEWTON's Arbejder, han har haft Lejlighed til at kende, og paa hvilke Tidspunkter. Hans

Evne til at forstaa disse og deres Betydning ogsaa gennem korte Antydninger, til straks at gøre selvstændige Anvendelser deraf og til at indarbejde det deraf lærte saavelsom alt det, der forelaa fra hans andre Forgængere, i sit eget System hører imidlertid med til, hvad man beundrer hos Leibniz. Man kan altsaa rolig paaskønne alt det, som foreligger fra de to Mænds Haand, uden ængstelig at spørge om den Prioritet, der har sat saa mange Penne i Bevægelse.

Vil man saa endelig anstille en Sammenligning, vil Resultatet blive forskelligt efter, hvad man selv sætter højest. Newton er den store Opdager af dybtliggende mathematiske Sandheder, saavel af dem, der ligge til Grund for Differential- og Integralregningen, som af de mathematiske Love, der herske i Naturen. Han forstaar ogsaa fuldt ud at drage det mathematiske Udbytte af de opdagede Sandheder. Dertil udtænker han Metoder af stor Rækkevidde, men ved disses Bearbejdelse har han nærmest de af ham selv tilstræbte Maal for Øje og lægger ikke an paa i det enkelte at udarbejde dem ogsaa til Brug for andre. Det Værk, som dog i Sammenhæng skulde gøre Rede for hans Hovedmetode, vilde derfor næppe, selv om det straks var fremkommet, have fremkaldt saa stor Bevægelse og gjort det saa hurtig, som Leibniz' Differentialregning gjorde. Newton's Mangel paa Interesse for at optræde som Metodelærer viser sig ogsaa i, at han aldrig overvandt visse Betænkeligheder ved at komme frem med dette Værk. Hemmelighedskræmmeri kan denne Tilbageholdenhed dog næppe skyldes, som man ofte har troet; thi der foreligger Beviser for, at han ikke var særlig tilbageholdende med private Meddelelser til dem, hos hvem han fandt Forstaaelse. At Metoderne i hans egen Haand derimod rakte fuldt saa vidt som Leibniz', fremgaar af *Principia,* hvor han overvandt større ogsaa rent mathematiske Vanskeligheder, end Leibniz og hans begyndende Skole endnu i en rum Tid kunde magte. I Mangel af en forudgaaende almindelig Fremstilling af Metoden maa han imidlertid, som vi have sagt det om de gamle, i dette Værk fremstille sine Resultater i en synthetisk Form, først Sætningen og dernæst et Bevis, der ikke direkte viser, hvorledes den er funden. Efterat Differential- og Integralregningen senere vare blevne bekendte, kunde derimod nye Udledelser af saadanne Sætninger — der dog i Hovedpunkterne maatte frembyde mange Overensstemmelser med de af NEWTON selv opstillede Beviser — tjene til Anvendelser, som i høj Grad befordrede disse Regningers egen Udvikling.

LEIBNIZ har paa sin Side ogsaa under Arbejdet paa de enkelte Spørgsmaal selve Metoden for Øje; han ser stadig hen til, hvortil denne samme Metode videre kan bruges, og stræber først og fremmest at faa den knyttet til simple Regler, der kunne udtales aldeles bestemt og dernæst rent mekanisk anvendes paa det Omraade, for hvilket de ere bestemte. Disse Regler formes som Regler for Brug af det af ham opfundne Tegnsprog, altsaa som rene Regneregler. Disse kunne til en vis Grad bruges ogsaa af den, der ikke har nogen anden Forstaaelse af Helheden end den, som er sammensat af Forstaaelsen af hver enkelt Regel for sig. NEWTON derimod har heller ikke i sit saa længe hengemte Skrift forklaret Brugen af sine i og for sig lige saa gode Tegn anderledes, end at deres Brug kræver en selvstændig tænkende Mathematiker.

Takket være LEIBNIZ kan nu enhver Polytekniker genfinde Resultater, som krævede indsigtsfuldt Arbejde hos hans Forgængere, og Mathematikere af Fag faa et langt hurtigere Overblik over alle Spørgsmaal indenfor Infinitesimalmathematiken. NEWTON har paa sin Side tilført Mathematiken dybere Tanker, og dette er en af Grundene, hvorfor en uddannet Mathematiker i Nutiden vistnok vil lære mere af at studere NEWTON end LEIBNIZ; men en anden Grund hertil er rigtignok, at han allerede ved at lære Differentialregningens Teknik og dens simple Anvendelser har lært det bedste af det, som skyldes LEIBNIZ.